H. 27.

DAVIDIS GREGORII M. D.
Astronomiæ Professoris *Saviliani* & S. R. S.

DE

CURVA CATENARIA

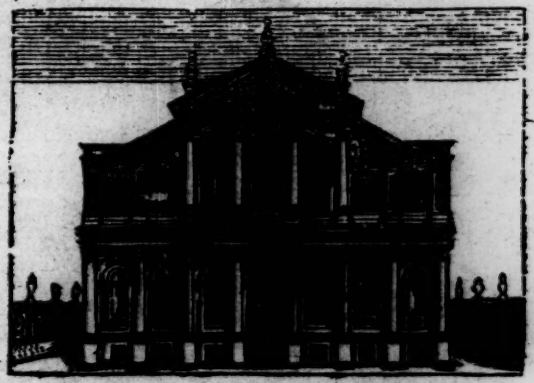
DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ,

AD REVERENDUM VIRUM

D. HENRICUM ALDRICH S. T. P.

Decanum Ædis Christi *Oxoniæ*.

E Museo Saviliano, Oxoniæ.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, A. D. MDCXCVII.

(17)

DAVIDIS GREGORII M. D.

Astronomiæ Professoris Savilliani & S. R. S.

DE

CURVA CATENARIA

DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

Ad Reverendum Virum

D. HENRICUM ALDRICH S.T.P.

Decanum Ædis Christi Oxoniæ.

BIBLIOTECA NACIONAL

OXONIÆ,

E Theatro Sheldoniano, A. D. MDCXCVII.

DAVIDIS GREGORII M. D.

Aſtronomiæ Profeſſoris *Saviliani* & S. R. S.

DE

CURVA CATENARIA

DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ,

AD REVERENDUM VIRUM

D. HENRICUM ALDRICH S. T. P.

Decanum Ædis Chriſti *Oxoniæ.*

CUM Problema de figura Catenæ (id eſt lineæ flexilis, verſus centrum longinquum gravis, & pondere ſuo dum à duobus extremis immotis dependet incurvatæ) ſit inter hujus ævi Philoſophos imprimis nobile, ac à Celeberrimis Viris *Hugenio*, *Leibnitio* & *Bernoullio*, plurimæ figuræ iſtius proprietates fuerint detectæ, & in Actis Eruditorum *Lipſiæ* (at ſine demonſtratione) editæ: Libuit harum omnium demonſtrationes pertexere, ope Methodi *Neutonianæ* Geometris hodie familiaris, fluxiones è fluentium relatione data determinandi & viciſſim; & alias inſignes Curvæ hujus proprietates nunc primum detectas adjicere, tibique Reverende Decane, harum rerum Judici idoneo mittere.

Prop. I. Problema.

Fig. 1. INvenire relationem inter fluxionem axeos & fluxionem ordinatæ in Curva Catenaria.

Sit Catena F A D ab extremitatibus F & D dependens, cujus punctum imum (ſeu Curvæ vertex) A, axis A B ad horizontem erectus, eique applicata B D horizonti parallela. Inveniendа

da eſt relatio inter B b ſeu D ♪ & d ♪; poſito b puncto ipſi B proximo, & b d ad B D, item D ♪ ad B A parallela.

Ex Mechanicis conſtat Potentias tres in æquilibrio poſitas eandem habere rationem cum rectis tribus ad ipſarum directiones parallelis, vel in dato angulo inclinatis, à mutuo occurſu terminatis; Adeoque ſi D d exponat gravitatem abſolutam particulæ D d (ut in Catena æqualiter craſſa rite fit) d ♪ repreſentabit gravitatis partem eam quæ normaliter in D d agit, quaque fit ut d D (ob Catenæ flexilitatem circa d mobilis) in ſitum verticalem ſe componere conatur. Adeoque ſi ♪ d (ſive fluxio ordinatæ B D) conſtans ſit; gravitatis actio in partes correſpondentes Catenæ D d normaliter exerta etiam conſtans erit ſive ubique eadem. Exponatur hæc per rectam a. Porro ex ſupra citato Lemmate Mechanico, D ♪ ſive fluxio axeos A B exponet vim ſecundum directionem ipſius d D exerendam, quæ priori conatui lineæ gravis d D ad componendam ſe in ſitum verticalem æquipolleat, eumque impedire poſſit. Hæc vero vis oritur à linea gravi D A ſecundum directionem d D trahente; eſtque proinde (cæteris manentibus) lineæ D A proportionalis. Eſt igitur ♪ d fluxio ordinatæ ad ♪ D fluxionem abſciſſæ, ſicut conſtans recta a ad D A curvam. q. e. f.

Corollarium.

Si recta D T tangat Catenariam, & axi B A producto occurrat in T, erit D B. B T :: (d ♪. ♪ D ::) a. D A Curvam.

Prop. 2. Theorema.

Fig. 1. SI ad perpendiculum A B tanquam axem, vertice A, deſcribatur hyperbola æquilatera A H, cujus ſemi-axis A C æqualis a; & ad eundem axem & verticem, parabola A P cujus parameter æqualis quadruplo axi hyperbolæ, & producatur ſemper hyperbolæ ordinata H B, donec H F æqualis Curvæ A P: Dico Curvam F A D in quo puncta F & D verſantur (poſitis B D, B F æqualibus) eſſe Catenariam.

Vocetur

Vocetur A B x, erit B b $= \dot{x}$, & B H $= \sqrt{2ax + x^2}$. Unde ex methodo fluxionum, fluxio ipſius B H (ſive m h) $= \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Rurſus quia parabolæ A P parameter $= 8a$, erit B P $= \sqrt{8ax}$. Unde n p (hoc eſt fluxio ipſius B P) æqualis $\frac{2a\dot{x}}{\sqrt{2ax}}$. Quare fluxio Curvæ A P $(= Pp = \sqrt{npq + Pnq}) = \sqrt{\frac{4a^2\dot{x}^2}{2ax} + \dot{x}^2}$ $= \sqrt{\frac{2a\dot{x}^2 + x\dot{x}^2}{x}}$ quæ, ducendo tam numeratorem quam denominatorem in $\sqrt{2a + x}$, $=$) $\frac{2a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Et cum H F ſit ubique $=$ A P, erit fluxio H F rectæ, hoc eſt m h $+$ s f $= \frac{2a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Sed hactenus inventa eſt m h $= \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Unde s f ſive fluxio ipſius B F ordinatæ ad axem Catenariæ, eſt æqualis $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Et igitur fluxio Curvæ A F (ſive ipſa F f $= \sqrt{sfq + Fsq} = \sqrt{\frac{a^2\dot{x}^2}{2ax + x^2} + \dot{x}^2}) = \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$, cujus fluens modo oſtenſa eſt $\sqrt{2ax + x^2}$. Et igitur A F $= \sqrt{2ax + x^2}$. Patetque fluxionem ordinatæ B F ſive $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$ eſſe ad $\dot{x}$ fluxionem abſciſſæ A B ſicut data a ad Curvam A F, quæ eſt ſuperius inventa Catenariæ proprietas. Igitur Catenariæ puncta recte determinantur per præcedentem conſtructionem. q. e. d.

Corollaria.

1. Ex conſtructione patet B F ordinatam Catenariæ æquari Curvæ parabolicæ A P, dempta B H correſpondente ordinata hyperbolæ conterminæ A H.

2. Ex demonſtratione conſtat Catenariam Curvam A F æquari B H correſpondenti ordinatæ Conterminæ Hyperbolæ æquilateræ. Cum enim harum linearum fluxiones æquentur, & ſimul naſcantur ipſæ lineæ; patet illas ubique eſſe æquales. Unde datâ catenâ, dabitur A C ſive a, quippe æqualis ſemi-axi Hyperbolæ æquilateræ cujus vertex A, & ordinata ad abſciſſam A B catenæ A D eſt æqualis.

3. Catenariæ omnes ſunt inter ſe ſimiles, cum ex ſimili ſimilium & ſimiliter poſitarum figurarum conſtructione generentur. Unde duæ rectæ ad Horizontem ſimiliter inclinatæ per Catenarum vertices ductæ abſcindent figuras ſimiles, & Catenarum portiones abſcindentibus rectis proportionales.

4. Si Catena Q A D ſuſpendatur à punctis Q & D inæqualiter altis, Curvæ pars F A D eadem manet, ac ſi ex punctis æqualtis F & D eſſet ſuſpenſa, quoniam nihil refert utrum punctum F affixum ſit vel non affixum ad planum verticale.

5. Si Catenæ vis trahens ſecundum directionem d D exponatur per D d, dividetur, ut vulgo notum, in vim ut d ♁ ſecundum directionem horizontalem, & vim ut ♁ D ſecundum directionem verticalem: Igitur vis in Catenæ extremo directe accedendi ad axem, eſt ad vim in eodem deſcendendi ſecundum perpendiculum; ſive vis ſuſtinentis pars ſecundum directionem B D agens, eſt ad ejuſdem partem ſecundum directionem D ♁ agentem, ut ſemi-axis Hyperbolæ conterminæ A H ad D A longitudinem Catenæ uſque ad verticem Curvæ: Unde datâ Catenâ ratio hæc datur. Et in eadem Catena nunc magis nunc minus laxe ſuſpenſa, vis iſta Horizontalis eſt ut Hyperbolæ conterminæ axis, cum D A eadem maneat ſi extrema æquialta ſint.

6. Catena in plano verticali, ſed ſitu inverſo, figuram ſervat nec decidit, adeoque arcum ſeu fornicem facit tenuiſſimum: Hoc eſt ſpheræ minimæ rigidæ & lubricæ in inverſa Curva Catenaria diſpoſitæ, arcum conſtituunt cujus nulla pars ab aliis extrorſum vel introrſum propellitur; ſed manentibus infimis punctis immotis, virtute ſuæ figuræ ſuſtinetur. Cum enim punctorum Curvæ Catenariæ ſitus, partiumque inclinatio ad Horizontem eadem ſit, ſive in ſitu F A D, ſive in ſitu inverſo, dummodo Curva ſit in plano ad Horizontem recto, patet illam æque ſervare figuram immutatam in uno ſitu ac in altero. Et è converſo

verſo ſolæ Catenariæ ſunt fornices ſive arcus legitimi: Et cujuſcunque alterius figuræ Arcus ideo ſuſtinetur, quod in illius craſſitie quædam Catenaria incluſa ſit: Neque, ſi tenuiſſimus eſſet, parteſque haberet lubricas ſuſtineretur. Ex præcedente Corol. 5. colligitur quali vi arcus, muros quibus inſiſtit extra propellit; nempe hæc eadem eſt cum parte vis Catenam ſuſtinentis, quæ ſecundum directionem Horizontalem trahit. Quæ enim in Catena introrſum trahit vis, in arcu Catenæ æquali, extrorſum propellit. Alia omnia de murorum quibus fornices imponuntur firmitate requiſita, ex hac Theoria Geometrice determinantur, quæ in ædificiorum extructione præcipua ſunt.

7. Si loco gravitatis alia quælibet vis ſimiliter agens in lineam flexilem vires ſuas exerat, eadem producetur linea. V. g. Si ventus æquabilis ſupponatur, & ſecundum rectas datæ poſitione rectæ parallelas ſpirans, linea vento inflata eadem erit cum Catenaria. Nam cum omnia quæ in gravitate conſideravimus, in altera hac vi obtineant, patet eandem Curvam productum iri.

Prop. 3. Theorema.

Fig. 2. **SI manente prædicta Hyperbola A H, per A ducatur recta G A L axi A B normalis, & deſcribatur Curva K R ejus naturæ, ut B K ſit tertia proportionalis rectis B H & A C, & ad A C applicetur rectangulum A V æquale ſpatio interminato A B K R L A, erit F concurſus rectarum H B, V G ad Catenariam.**

Nam ex conſtructione eſt $BK = \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$, quare fluxio ſpatii $ABKRLA = (BKkb = BK \times Bb =) \frac{a^2 \dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Cumque $BF = \frac{\text{ſpatio } ABKRLA}{AC}$, & A C detur, erit fluxio ipſius $BF = \frac{\text{fluxioni ſpatii } ABKRLA}{AC} = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Sed

in

in præcedentis Prop. conſtructione, fluxio ordinatæ B F $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Quare hæc conſtructio eodem redit cum conſtructione Prop. præcedentis, & conſequenter punctum F eſt ad Catenariam. q. e. d.

Corollarium.

Sicut in Prop. præced. Catenaria deſcribitur ex data longitudine Curvæ parabolicæ, ita in hac, illius deſcriptio pendet à quadratura ſpatii in quo $x^2 y^6 = a^4 - 2ax y^3$. Nam y (ſive B K) $= \frac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

Prop. 4. *Theorema.*

Fig. 1. SPatium A G F ſub Catenaria A F & rectis F G, A G ad A B, B F parallelis comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub ſemi-axe A C, & D H intervallo applicatarum in Hyperbola & Catenaria.

Nam $DH = (BH - BD =$, ex Prop. 2. hujus, $\frac{a\dot{x}+x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} - \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} =) \frac{x\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Quare fluxio rectanguli ſub data A C & D H $= (\frac{ax\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} = x \times \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}} =$ fs x F G$=)$ fluxioni ſpatii A G F. Cumque figuræ hæ ſimul naſcantur, ſequitur rectangulum ſub A C & D H æquari ſpatio A G F. q. e. d.

Corollarium.

Hinc ſequitur ſpatium F A D, ſub Catena F A D & recta Horizontali F D comprehenſum, æquari rectangulo ſub F D & B A, dempto rectangulo ſub Hyperbolæ A H axe alterutro, & D H exceſſu rectæ B H, vel Curvæ A D, ſupra ordinatam B D.

Prop.

Prop. 5. Theorema.

Fig. 1. SI ad rectam A L applicetur rectangulum L E æquale ſpatio Hyperbolico A L H, erit E centrum Æquilibrii Curvæ Catenariæ A F D.

Concipiatur Curva gravis F A librari ſuper axe G L. Ex Centrobarycis conſtat momentum gravis F A exponi per ſuperficiem Cylindrici recti ſuper F A erecti, & reflecti plano per G L tranſeunte, cum plano Curvæ angulum ſemirectum faciente. Et hujus ſuperficiei fluxio, ſive F A × F G, æqualis eſt fluxioni ſpatii A L H ſive B H × H L; quia F A, B H, item F G & H L æquantur. Ac propterea (cum ſimul naſcantur) dicta ſuperficies Cylindrici recti æqualis eſt ſpatio Hyperbolico A L H. Hoc proinde applicatum ad ipſum grave A F, vel illi æqualem rectam A L, facit latitudinem A E æqualem diſtantiæ centri gravitatis ab axe librationis G L. Unde Curvæ F A D, æqualiter ad utramque axeos A B partem jacentis, centrum æquilibrii eſt E. q. e. d.

Corollaria.

1. Spatia A B H L, B A H, & A G F ſunt Arithmetice proportionalia. Nam fluxio ſpatii A L H $= \left(\frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} \times x \right.$
$= \frac{a\dot{x} + x^2 \times \dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{\overline{2ax + x^2} - \overline{a\dot{x} \times \dot{x}}}{\sqrt{2ax + x^2}} = x\sqrt{2ax + x^2}$
$\left. - \frac{a\dot{x}\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \right)$ fluxioni ſpatii B A H, multatæ fluxione ſpatii A G F, per Prop. 4. hujus. Cumque hæ tres figuræ ſimul naſcantur, erit B A H − A G F = (A L H =) B L − B A H. Quare 2 B A H = B L + A G F. Unde ſequitur ſpatia B L, B A H & A G F eſſe in proportione Arithmetica.

2. Catenæ centrum gravitatis eſt omnium linearum ejuſdem longitudinis, eoſdemque terminos habentium, infimum. Nam tantum

tantum deſcendet grave quantum poteſt. Cumque tantum deſcendat figura, quantum ejus centrum gravitatis deſcendit, ſe ſic diſponet linea gravis flexilis, ut ejus centrum gravitatis ſit inferius quam ſi aliam quamcunque figuram indueret. Atque ex hoc ſymptomate lineæ gravis flexilis, reliqua omnia facile deduci poſſent.

3. Si ſuper quaſcunque Curvas eandem longitudinem eoſdemque terminos D & F cum Catenaria F A D habentes, erecti Cylindrici recti ſecentur plano per D F tranſeunte; ſuperficierum Cylindricarum ſic reſectarum maxima eſt quæ ſuper Catenariam inſiſtit. Hæ enim ſuperficies (ſi angulus ſub planis fuerit ſemirectus) ad ipſas Curvas (quæ ſunt in caſu præſenti longitudinis ejuſdem) applicatæ, latitudines faciunt æquales diſtantiis centrorum gravitatis Curvarum à D F recta: Cum diſtantia hæc ſit in Catenaria maxima (ob maximum deſcenſum centri gravitatis) erit Cylindrica ſuperficies applicanda etiam maxima. Et quoniam ſuperficierum Cylindricarum reſectarum plano cum plano baſeos angulum quemvis continente, eadem eſt ratio atque cum dictus angulus eſt ſemirectus, patet propoſitum univerſaliter.

Lemma.

Fig. 1. SI in cujuſvis Curvæ A F Q, deſcriptæ evolutione alterius Curvæ K V, ordinatam quamvis F B ad axem A B normalem, à correſpondente in K V puncto V demittatur normalis V R ordinatæ occurrens in R: Erunt, manente fluxione axeos A B eadem, fluxio fluxionis ordinatæ B F, fluxio Curvæ A F, & recta F R continue proportionales.

Producatur rectula F f donec proximæ ordinatæ w φ occurrat in o. Et quoniam ex hypotheſi F s = f w, erit o f = F f, adeoque o φ erit fluxio ipſius f s, hoc eſt fluxio fluxionis ordinatæ. Porro triangula o φ f, f F R ſunt æquiangula, quia o φ f = alterno f F R, & f o φ = (F f r =) F f R, quia illorum intervallum R f r alterutrius reſpectu evaneſcit, cum R r præ f r nulla ſit. Et igitur o φ. φ f :: f F. F R, ſed φ f, f F æqua-

les

les ſunt, cum fluxione utriuſvis tantum differant. Quare $o\varphi . fF :: fF . FR$. q. e. d.

Prop. 6. Problema.

Fig. 1. INvenire Curvam K V cujus evolutione Catenaria A F Q deſcribitur.

Vocetur ut prius A B x, item B F y. Eſt, ex Prop. 2. hujus, $y = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$, ſive $2axy^2 + x^2y^2 = a^2x^2$. Quare, per ſatis nunc uſurpatam *Neutoni* methodum, $2a\dot{x}y^2 + 4ax\dot{y}y + 2x\dot{x}y^2 + 2x^2\dot{y}y$ $(= 2a^2x\dot{x}$ quæ, propter $\dot{x} = o$ cum conſtans x non fluat$) = o$. Quare $y = \left(\frac{-a\dot{x}y - x\dot{x}y}{2ax + x^2} =\right) \frac{a + x}{2ax + x^2} \times \frac{ax^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$, ponendo loco y, ejus valorem $\frac{ax}{\sqrt{2ax + x^2}}$. (Nam ſignum — quantitati y præfixum, tantum denotat locum puncti R ex F ſpectati, oppoſitum eſſe loco puncti F ex B ſpectati, cum curva A F Q eſt cava verſus axem A B) Et F f, per Prop. 2. hujus, $= \frac{a + x \times x}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Quare per præcedens Lemma, $FR = \left(\frac{Ffq}{y} = \frac{\overline{a + x}^2 \times x^2}{2ax + x^2} \times \frac{\overline{2ax + x^2} \times \sqrt{2ax + x^2}}{a + x \times ax^2} =\right) \frac{a + x \times \sqrt{2ax + x^2}}{a}$. Rurſus ob triangula rectangula F s f, F R V habentia angulos f F s, V F R æquales, quia V F s eſt utriuſque complementum ad rectum, eſt F s. s f :: F R. V R, ſive $\dot{x} . \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} :: \frac{a + x \times \sqrt{2ax + x^2}}{a} ::$ V R quæ proinde æqualis $a + x$. Hæc igitur eſt natura curvæ K V, ut ſi A B vocetur x, erit $FR = \frac{a + x \times \sqrt{2ax + x^2}}{a}$, & $VR = a + x$. q. e. i.

Corollaria.

1. A C. C B :: B H. F R. Hæc enim eſt proprietas rectæ F R ſuperius inventa.

2. Recta C B æqualis eſt rectæ B I ſive V R. Utraque enim eſt æqualis $a+x$.

3. Recta evolvens V F eſt tertia proportionalis ipſis A C, C B. Nam ob æquiangula triangula f F s, V F R, eſt s F. F f :: F R. V F. Sive $x \cdot \frac{ax+xx}{\sqrt{2ax+x^2}} :: \frac{a+x \times \sqrt{2ax+x^2}}{a} \cdot VF$ quæ proinde $= \frac{\overline{a+x}^2}{a}$. Unde $a \cdot a+x :: a+x \cdot VF$, quæ præterea eſt radius circuli Catenæ in F æquicurvi.

4. Cum punctum F eſt in A, ſive cum vertex evolutione deſcribitur, id eſt cum $x = o$, valor evolventis rectæ V F quæ in hoc caſu eſt K A, nempe $\frac{\overline{a+x}^2}{a}$ fiet a: hoc eſt punctum K ubi Curva V K occurrit axi, tantum extat ſupra Catenæ verticem A, quantum C deprimitur infra eundem. Unde diameter circuli, Catenæ ad verticem æquicurvi, æqualis eſt axi conterminæ Hyperbolæ A H. Adeoque Catenæ A D & Hyperbolæ A H eadem eſt curvatura in vertice A: Nam vulgo notum eſt circulum prædictum, Hyperbolæ æquilateræ A H in vertice A æquicurvum eſſe. Sed & hoc aliunde, ex ipſa Catenæ natura Prop. 2. hujus demonſtrata, conſtat. Nam naſcens F H ſive (A P = naſcenti B P =) $\sqrt{2ax}$ dupla eſt naſcentis B H ſive ($\sqrt{2ax+x^2}$, hoc eſt, evaneſcente x^2, cum x minima ſit) $\sqrt{2ax}$; Et igitur idem punctum eſt tam in naſcente Hyperbola quam naſcente Catenaria; h. e. Naſcens Hyperbola A H cum naſcente Catenaria A D coincidit, & proinde æquicurvæ ſunt hæ lineæ ad verticem A.

5. Curva K V eſt tertia proportionalis ad rectam A C & curvam A F ſive rectam A L. Ex natura enim evolutionis, $KV = (VK - KA = VF - KA = \frac{\overline{a+x}^2}{a} - a = \frac{a^2+2ax+x^2}{a} - a =) \frac{2ax+x^2}{a}$. Et igitur $a \cdot \sqrt{2ax+x^2} :: \sqrt{2ax+x^2} \cdot KV$.

Sed

Sed $\sqrt{2ax+x^2}$, ex Corol. 2. Prop. 2, = A F. Unde A C. A F :: A F. K V.

6. Recta K I dupla eſt ipſius A B. Cum enim B I = (B C =) C A + A B, erit A I = C A + 2 A B; At A K = A C, per Corol. 4. hujus; Igitur K I = 2 A B.

7. Rectangulum ſub A C & B R eſt æquale duplo ſpatio hyperbolico B A H. Nam $FR \times AC = (\frac{a+x \times \sqrt{2ax+x^2}}{a} \times a = a+x \times \sqrt{2ax+x^2} = x \times \sqrt{2ax+x^2} + a \times \sqrt{2ax+x^2} = AB \times BH + AC \times BH =) AB \times BH + AC \times BD + AC \times DH$. Quare $FR \times AC - BD \times AC$, hoc eſt $BR \times AC = AB \times BH + AC \times DH$. Sed, per Prop. 4. hujus, $AC \times DH = AGF$ ſpatio. Et igitur $BR \times AC = (ABHL + AGF =$ per Corol. 1. Prop. 5.) 2 B A H.

Prop. 7. Theorema.

Fig. 3. SI in Curva Logarithmica L A G cujus data ſubtangens H S æqualis rectæ a, Corol. 2. Prop. 2. hujus definitæ, ſumatur punctum A cujus diſtantia ab H P aſymptoto, nempe A C, æqualis ſit ſubtangenti H S, & ex punctis H & P utcunque in aſymptoto ſumptis à puncto C æqualiter diſtantibus, erigantur H L, P G ordinatæ ad Logarithmicam, quarum ſemiſummæ ponatur æqualis H D vel P F, erunt D & F ad Catenariam rectæ A C correſpondentem.

Vocetur A B x, adeoque C B vel D H ſemiſumma ordinatarum H L, P G erit a + x; ſemidifferentia earundem vocetur y. Unde H L = a + x + y, & P G = a + x − y. Cumque ex natura Logarithmicæ, C A ſit inter has media proportionalis, erit $a^2 + 2ax + x^2 - y^2 = a^2$. Unde $y = \sqrt{2ax+x^2}$. Adeoque $HL = a + x + \sqrt{2ax+x^2}$ & $PG = a + x - \sqrt{2ax+x^2}$. Quare fluxio ipſius H L, ſive ipſa l m eſt $\frac{ax + xx + x\sqrt{2ax+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

Et ab æquiangula triangula l m L, L H S, eſt L H. H S :: l m . m L, unde m L ſive $d\,s$ fluxio ipſius B D $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Hoc eſt Curva A D ex Logarithmica ſupradicto modo genita, ejus eſt naturæ, ut ſi axis Vocetur x, ejuſque fluxio $\dot{x}$, fluxio ordinatæ B D ſit $\frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Sed hæc ipſa eſt proprietas Catenariæ ad quam a pertinet, Prop. 1. hujus demonſtrata. Ergo Curva F A D ſuperius deſcripta eſt hæc ipſa Catenaria. q. e. d.

Corollaria.

1. Sicut ope Logarithmorum Catenaria deſcribitur, vice verſa ope Catenariæ per ipſam rerum naturam productæ, numeri dati vel potius rationis datæ Logarithmus invenitur. Ut ſi poſita C A unitate, cujus Logarithmus eſt nihilo aqualis, quæratur Logarithmus numeri C Q ſive rationis inter C A & C Q; Rectis C Q & C A tertia proportionalis ſit C V, ipſarumque C Q, C V ſemiſumma C B; ex B ordinata ad Catenariam, nempe B D eſt Logarithmus quæſitus. Ratio ex Propoſitione manifeſta eſt.

2. Viciſſim ſi dato Logarithmo C H vel C P, quæratur correſpondens numerus H L vel P G, ſeu ratio H L ad C A, ſive P G ad C A. Ex H vel P erigatur perpendiculum Catenæ occurrens in D vel F, ipſique H D vel P F hoc eſt C B, fiat æqualis C R ad horizontalem A R terminata; Eritque A R ſemidifferentia quæſitarum L H, G P, ſicut ex ſupra demonſtrata Catenæ natura H D vel C R eſt earundem ſemiſumma: (Nam in tribus quantitatibus Geometrice proportionalibus quales ſunt H L, C A, P G, quadratum ſemiſummæ extremarum multatum quadrato mediæ, æquatur quadrato ſemidifferentiæ extremarum.) Adeoque C R + A R, & C R — A R ſunt numeri H L vel G P, dato Logarithmo C H vel C P congrui.

3. Ex demonſtratione patet quod ſicut H D ſemiſumma Logarithmicæ ordinatarum H L, P G, ad C H normaliter applicata in H, eſt ordinata Catenariæ, ſic ſemidifferentia earundem H L, P G, ad C A normaliter applicata in B eſt ordinata Hyperbolæ æquilateræ centro C vertice A deſcriptæ: ac proinde (per

Corol.

Corol. 2. Prop. 2. hujus) æqualis Catenæ A D. Nam $y = \sqrt{2ax + x^2}$. Cumque Corol. præced. oſtenſum ſit A R eſſe etiam ſemidifferentiam rectarum H L, P G, patet A R eſſe æqualem Catenariæ portioni A D. Unde obiter eluceſſit modus, datâ Catenâ A D, inveniendi C centrum Hyperbolæ conterminæ, vel punctum in aſymptoto Logarithmicæ G L. Nam ſi ſumatur A R æqualis Catenæ A D, & ex junctæ rectæ B R puncto medio erigatur ad ipſam B R normalis, hæc occurret B A axi Catenæ in quæſito puncto C, uti patet. Nam ſic erit C R = C B.

4. Hinc etiam ſequitur ſi B D T angulus fiat æqualis A C R, rectam D T tangere Catenariam in D. Nam ſic fiet in triangulis æquiangulis D B T, C A R; D B . B T :: C A . A R ſive huic æqualem A D curvam. Et igitur, per Corol. Prop. 1. hujus, D T tangit Catenariam.

5. Sequitur etiam ſpatium A C H D æquari rectangulo ſub C A & A R. Nam quoniam A Y D eſt, per Prop. 4. æquale rectangulo ſub C A & (A D — B D =, per Corol. 3. hujus Prop. A R — A Y =) Y R, patet propoſitum. Et quoniam C A datur, conſtat ſpatium A C H D eſſe ſicut A D curva, illiuſque fluxionem H d ſicut D d fluxio hujus.

6. Si per punctum K ubi C R ſecat H D, ducatur K Z parallela P H, rectæ A C occurrens in Z, ſumaturque C E æqualis ſemiſummæ ipſarum B C, C Z, erit E centrum Æquilibrii Curvæ F A D.

Intelligatur ſuper F A D erecta ſuperficies Cylindrici recti reſecti plano per P H ad angulos ſemirectos cum plano Curvæ F A D; Exponet hæc ſuperficies momentum Curvæ F A D ſuper axe P H libratæ, ejuſque fluxio eſt $D H \times D d + P F \times F f = 2 B C \times A D = 2 \times a + x \times \frac{a\dot{x} + x\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{2a^2\dot{x} + 4ax\dot{x} + 2x^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{a^2\dot{x} + ax\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{3ax\dot{x} + 2x^2\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}}$ cujus fluens $a \times B D + a\sqrt{2ax + x^2} + x\sqrt{2ax + x^2} = C A \times B D + C B \times A D$. Quare C A × B D + C B × A D = (quoniam ſimul naſcitur, dictæ ſuperficiei Cylindricæ =) momento Curvæ F A D ſuper axe P H libratæ. Unde diſtantia centri gravitatis Curvæ F A D

à puncto C eſt $\frac{CA \times BD + CB \times AD}{2AD}$ ſive $\frac{1}{2}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{2}CB$. Porro ob ZK parallelam AR, eſt AD. BD :: (AR. ZK ::) CA. CZ, unde $CZ = \frac{CA \times BD}{AD}$, & igitur CE quæ per conſtructionem eſt $= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CZ$, erit $= \frac{1}{2}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{2}BC$: hoc eſt Curvæ FAD centrum gravitatis, & E punctum ex conſtructione definitum, æqualiter diſtant à C; ſed & in eadem recta & verſus eaſdem partes ſita ſunt, ergo coincidunt illa.

Poteſt & coincidentia puncti E ut ſupra determinati, cum centro æquilibrii Prop. 5. hujus definito, ſynthetice ſic oſtendi.

Per Corol. 1. Prop. 5. $2BAX = AYD + BA \times AR$. Unde $AH + 2BAX = (ACHD + BA \times AR =$ per præced. Corol.) $AR \times CA + BA \times AR$: hoc eſt $BD \times AC + 2BAX = AR \times CB$; ſive $BD \times AC = AR \times CB - 2BAX$. Unde $BD \times AC + AD \times BC = (AD \times BC + AR \times CB - 2BAX = 2AD \times BC - 2BAX =) 2AD \times AC + 2AD \times AB - 2BAX$. Et applicando ad 2AD, erit $\frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC = (AC + \frac{AB \times AD - BAX}{AD} =) CA + \frac{ARX}{AR}$. Sed $\frac{ARX}{AR}$ eſt diſtantia centri æquilibrii Catenæ à vertice A, per Prop. 5. hujus determinata, ac proinde, ſecundum dictam Prop. 5. $CA + \frac{ARX}{AR}$ eſt diſtantia puncti E à C, & $\frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC$ eſt ejuſdem E diſtantia ab eodem C ſecundum hoc Corol. 6. Unde patet duas iſtas determinationes puncti E eodem recidere, quoniam $CA + \frac{ARX}{AR} = \frac{1}{2}\frac{BD \times AC}{AD} + \frac{1}{2}BC$.

7. Spatii PFADH centrum gravitatis eſt in I medio puncto rectæ CE. Cum centrum gravitatis fluxionis ipſius AD ſive Dd & Ff, duplo magis diſtet à PH quam centrum gravitatis fluxionis ipſius ACHD ſive DHhd & FPpf, & $Dd + Ff \times AC$ datam, æquale $DdhH + FfpP$, patet & fluentis FADcentrum gravitatis E duplo magis diſtare à PH, quam fluentis PFADH centrum I. Sed libet propoſitum aliter & ad modum ſuperiorum oſtendere.

In-

Intelligatur super figura P F A D H erectus Cylindricus rectus & resectus plano per P H transeunte, cum plano baseos angulum semirectum comprehendente; exponet istud solidum, momentum figuræ P F A D H super axe P H libratæ; Hujusq; solidi sive prædicti momenti fluxio, (solida nempe erecta super P F f p & H D d h) producitur, si momentum fluxionis, sive fluxio momenti ipsius A D, ducatur in $\frac{1}{2}$ A C datam. Nam per Corol. 5. hujus Prop. H D d h = D d × A C: Quare ipsum momentum fluens producitur ducendo momentum Curvæ F A D respectu axis P H, superiore Corol. determinatum, nempe C A × B D + C B × A D, in $\frac{1}{2}$ A C; eritq; proinde $\frac{1}{2}$ A C × A C × B D + $\frac{1}{2}$ A C × C B × A D. Adeoque si hoc applicetur ad figuram libratam P F A D H sive 2 C A × A D per hujus Prop. Corol. 5, fiet distantia centri gravitatis figuræ P F A D H ab axe P H $= (\frac{1}{4}\frac{CA \times BD}{AD} + \frac{1}{4} CB =)$ dimidiæ rectæ C E superius determinatæ.

8. Si per N punctum ubi D T tangens Catenariam in D, secat A R, ducatur recta parallela ipsi B C, occurrens rectæ per E ad A R parallelæ in O; erit O centrum gravitatis curvæ A D. Nam per Corol. 6, centrum gravitatis curvæ A D est in recta E O, sed demonstrabitur illud esse in N O recta, & proinde erit ipsum O punctum. Intelligatur D A librari circa H L axem; hujus momentum est curva D A ducta in distantiam centri gravitatis ab H L: Et ejus proinde fluxio = D A × H h (H h est fluxio distantiæ axis librationis à gravitatis centro) $= \sqrt{2ax + x^2} \times \frac{ax}{\sqrt{2ax + x^2}} = ax$. Ac proinde ipsum momentum Curvæ gravis D A circa axem H L libratæ = a x. Et igitur distantia centri gravitatis ab eodem axe est a x applicata ad A D, sive $\frac{AC \times DY}{AR}$. Sed quia D T tangit Catenariam, per Corol. 4. hujus Prop. angulus B D T sive D N Y = A C R, & anguli ad A & Y sunt recti, quare in triangulis æquiangulis R A C, D Y N; R A . A C :: D Y . Y N. Unde $YN = \frac{AC \times DY}{RA}$, hoc est Y N est distantia centri gravitatis Catenæ A D ab axe H L, sive centrum prædictum est in recta N O.

9. Si

9. Si per D ducatur recta ad AR parallela, rectæ ON productæ occurrens in W, erit W centrum gravitatis ſpatii ACHD. Nam per Coroll. 7. centrum gravitatis ſpatii ACHD eſt in recta IW, ſed ut mox oſtendetur, eſt in NW, & proinde eſt ipſum W punctum. Eodem enim modo quo in Corol. præced. fluxio momenti ſpatii ACHD circa HL librati oſtenditur eſſe $(ACHD \times Hh = AC \times AD \times Hh = a \times \sqrt{2ax + x^2} \times \frac{a\dot{x}}{\sqrt{2ax + x^2}} = a^2\dot{x}$. Ac proinde ipſum momentum ſpatii ACHD circa axem HL librati, æquale eſt fluenti cujus $a^2\dot{x}$ eſt fluxio, hoc eſt ipſi a^2x. Hoc igitur applicatum ad ipſum ſpatium ACHD ſive $a \times \sqrt{2ax + x^2}$, dat diſtantiam centri gravitatis ſpatii ACHD ab $HL = \frac{ax}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{AC \times DY}{RA}$. Sed Corol. præced. oſtenſa eſt $YN = \frac{AC \times DY}{RA}$. Et igitur centrum gravitatis ſpatii ACHD eſt in NW. Atque ex duobus hiſce ultimis Corollariis invenitur centrum gravitatis cujuſvis portionis Catenæ etiam ad verticem A non pertingentis; vel cujuſvis ſpatii Catenariæ portione quavis, & alius rectis præter prædictas comprehenſi.

10. Hinc menſurantur ſuperficies & ſolida genita rotatione Catenæ, aut ſpatii ſub illa & rectis comprehenſi, circa axes datos. Nam figura rotatione genita æquatur, uti vulgo notum, figuræ rotatæ ductæ in peripheriam à centro gravitatis inter rotandum percurſam, etiam datam cum detur illius radius ſive diſtantia centri gravitatis ab axe dato. Sic ſi Catena AD rotetur circa axem AB, $\frac{\pi}{\rho}$ AN eſt peripheria à centro gravitatis O percurſa, ($\frac{\pi}{\rho}$ denotat rationem peripheriæ circuli ad ſemidiametrum) adeoq; ſuperficies rotatione Catenæ AD genita $= (\frac{\pi}{\rho} \times AN \times AD =) \frac{\pi}{\rho} \times AN \times AR$. Hoc eſt circulus cujus radius poteſt duplum rectangulum RAN, æquabitur ſuperficiei à Catenæ AD rotatione circa axem AB genitæ. Pari modo ſolidum genitum rotatione ſpatii ACHD circa AC, æquale oſtendetur Cylindro cujus baſis eſt prædictus circulus, altitudo vero æqualis AC. Similiterque ſuperficies & ſolida, ex rotatione harum figurarum circa alios quoſvis datos axes facta menſurantur. Nam dato centro gravitatis hæc non latebunt.

FINIS.

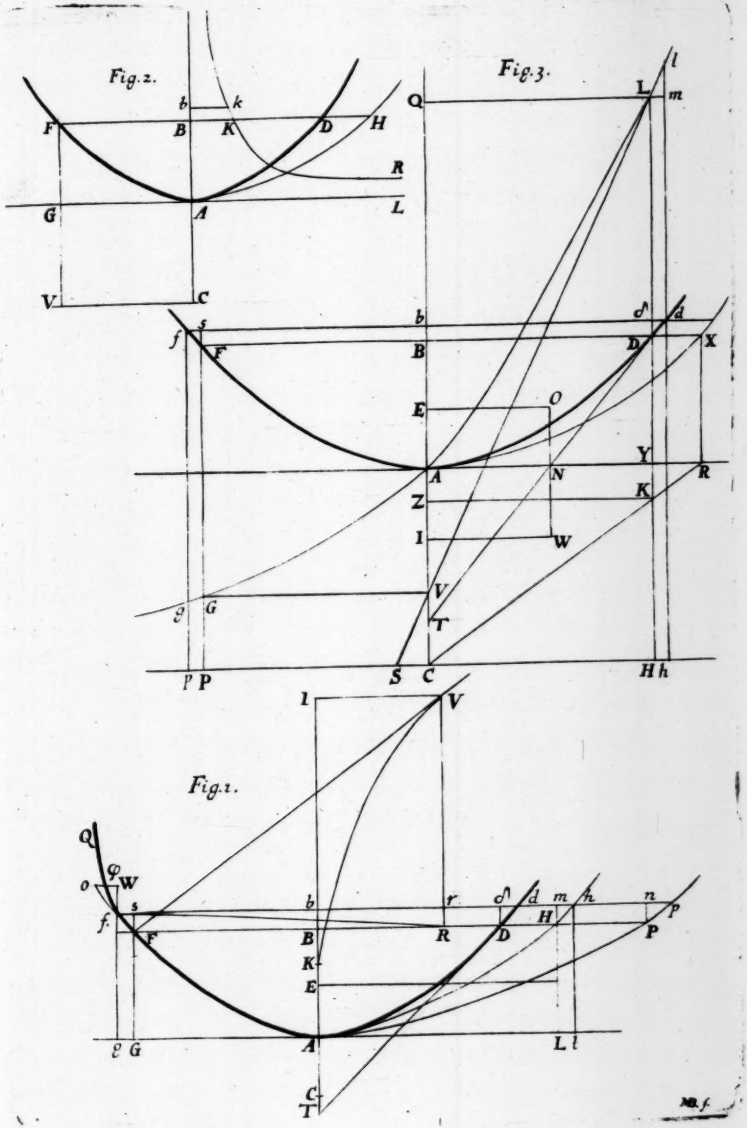


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 1.